

Dev n° 5Titre : lemme des Noyaux + Décomposition de DunfordSoit E un K -e.v de $\dim < +\infty$ $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.lemme: (des noyaux)Soit $m \geq 2$ un entier.Soient $P_1, \dots, P_m \in K[X]$ polynômes deux à deux premiers entre eux.Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors,

$$\text{Ker} \left(\prod_{k=1}^m P_k \right) (f) = \bigoplus_{k=1}^m \text{Ker} (P_k)(f).$$

De plus, le projecteur π_k de $\text{Ker} \left(\prod_{k=1}^m P_k \right) (f)$ sur $\text{Ker} P_k(f)$ parallèlement à la somme des autres est un polynôme en f .Thm: (Décomposition de Dunford)Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec χ_f scindé sur K , alors $\exists! (d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que:

- 1) $f = d + n$
- 2) $d \circ n = n \circ d$
- 3) d diagonalisable
- 4) n nilpotent

De plus, d et n sont des polynômes en f .Demo: (lemme)* Somme directe:Procédons par récurrence sur m .① $m=2$. $P_1, P_2 \in K[X]$ premiers entre eux.Par Bézout $\exists u_1, u_2$ t.q: $u_1 P_1 + u_2 P_2 = 1$
 $\Rightarrow u_1 P_1(f) + u_2 P_2(f) = \text{Id}$.* Soit $x \in \text{Ker } P_1(f) \cap \text{Ker } P_2(f)$, on a:

$$x = u_1 P_1(f)(x) + u_2 P_2(f)(x) = 0 + 0 = 0$$

Donc, $\text{Ker } P_1(f) \cap \text{Ker } P_2(f) = 0$.* Soit $x \in \text{Ker } P_1 P_2(f)$. On a:

$$x = \underbrace{u_1 P_1(f)(x)}_{y \in \text{Ker } P_2(f)} + \underbrace{u_2 P_2(f)(x)}_{z \in \text{Ker } P_1(f)}$$

Donc,

$$\forall x \in \text{Ker } P_1 P_2(f), \quad x = y + z \quad \text{avec } y \in \text{Ker } P_2(f) \text{ et } z \in \text{Ker } P_1(f).$$

Donc

$$\text{Ker } P_1 P_2(f) = \text{Ker } P_1(f) \oplus \text{Ker } P_2(f)$$

④ S.g propriété vraie au rang k .Posons $A = P_{m-1}$ et $B = P_1 \dots P_k$.

En appliquant le procédé de ① on a le résultat.

Poseons $A = P_{m+1}$ et $B = P_1 \dots P_m$

En appliquant le procédé de $\textcircled{I}$ on a le résultat.

$\textcircled{OCL}$ OK

* Projecteur:

Soit $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$. On a par Bézout $U_j P_j + V_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m P_k = 1$

Poseons $\pi_j = (V_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m P_k)(f)$

↳ Pour $x \in \text{Ker } P_j(f)$ on a:

$$x = V_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m P_k(f)(x) = \pi_j(x)$$

↳ Pour $y = P_j(f)(x) \in \text{Im } P_j(f)$, on a:

$$\pi_j(y) = \pi_j(P_j(f)(x)) = V_j(f) \circ \left(\prod_{k=1}^m P_k \right)(f)(x) = 0_E$$

Donc π_j correspond au projecteur recherché. $\square$

Démo: (thm)

* Existence:

Notons $\chi_f = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_r)^{m_r}$ avec $\lambda_i \in \mathbb{C}$ distincts et $m_i \geq 1$.

Par le lemme du noyau et thm Cayley Hamilton:

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \underbrace{\text{Ker}((\mu - \lambda_i \text{Id})^{m_i})}_{:= F_i}$$

Poseons $d = \sum_{i=1}^r \lambda_i \text{Id}_{|F_i} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \pi_j$ et $n = f - d$.

On a alors:

- d diagonalisable
- d polynôme en f (car π_j pol. en f)
- n polynôme en f
- n nilpotent car $n|_{F_i}$ p'et $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$
- $f = n + d$

* Unicité:

S.q. $\exists (d, n), (\tilde{d}, \tilde{n}) \in \mathcal{d}(E)^2$ vérifiant $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ et $\textcircled{4}$.

On a:

$$d + n = \tilde{d} + \tilde{n} \Rightarrow d - \tilde{d} = \tilde{n} - n$$

* $d - \tilde{d}$ sont des pol. en f donc commutent et diag $\Rightarrow$ co-diag.

* $\tilde{n} - n$ nilpotent (par binôme de Newton)

Donc,

$d - \tilde{d}$ et $\tilde{n} - n$ sont diag. + nilpotent $\Rightarrow$ nul

Donc,

$$d = \tilde{d} \text{ et } n = \tilde{n} \quad \square$$

Annexe:

• Méthode décomposition de Dunford

• 3) m est nilpotent car $m|_{F_k}$ l'est pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

$$(m|_{F_k} = (p - \lambda \text{Id})|_{F_k})$$

- 3) m est nilpotent car $m|_{F_k}$ l'est pour tout $k \in \llbracket 1; m \rrbracket$. ($m|_{F_k} = (f_k - \lambda \text{id})|_{F_k}$)

Si $x \in E$, $x = \sum_{k=1}^m x_k$ avec $x_k \in F_k$, on prend $q := \max_k (d_k)$ on a $m^q(x) = \sum_{k=1}^m \underbrace{m^q(x_k)}_{=0} = 0$
car $m^q(x_k) = m^{q-d_k} \circ m^{d_k}(x_k) = 0$. Donc $m^q = 0$.

- Diagonalisabilité simultanée: Plus généralement si $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{L}(E)$ commutent 2 à 2 et sont diagonalisables, ($m \geq 2$)

elles sont co-diagonalisables: Par récurrence sur la dimension de E ($m = \dim(E)$)

$m=1$: Évident elles sont toutes déjà diagonales dans la base $\{1\}$.

Supposons le résultat vrai pour $m \geq 1$.

Si les f_i sont toutes des homothéties c'est évident.

Si on suppose $k \in \llbracket 1; m \rrbracket$ tel que f_k ne le soit pas.

f_k est diagonalisable. On suppose $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (où $r \geq 2$ du coup) les valeurs propres de f_k .

On a $E = E_{\lambda_1} \oplus \underbrace{\bigoplus_{i=2}^r E_{\lambda_i}}_F$ avec F de dimension ≥ 1

puisque chaque E_{λ_i} est un noyau d'un polynôme en f_k

et puisque les f_i commutent avec f_k ,

chaque E_{λ_i} est stable par f_j pour tout j . Ainsi, E_{λ_1} et F sont stables par tous les f_j .

Chaque endomorphisme restreint est diagonalisable (en effet si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, $\exists P \in K[X]$ scindé à racines simples tel que $P(u)=0$. Si $F \subset E$ est stable par u , $P(u|_F) = P(u)|_F = 0$ donc $u|_F$ est diagonalisable)

Par hypothèse de récurrence,

il existe β et β' une base de E_{λ_1} et une de F tel que les matrices des f_j sont diagonales. En concaténant les bases on a le résultat voulu.

- Exercice colle:

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Quand a-t-on $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

* Cas A inversible:

$$\begin{aligned} \chi_{AB}(x) &= \det(\text{Id} x - AB) \\ &= \det(AA^{-1}x - AB) \\ &= \det(A) \det(A^{-1}x - B) \\ &= \det(A^{-1}x - B) \det(A) \\ &= \det(A^{-1}AX - BA) \\ &= \det(\text{Id} x - BA) \\ &= \chi_{BA}(x) \end{aligned}$$

* Cas A non inversible:

$GL_n(\mathbb{C})$ dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Donc, $\exists (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset GL_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ t.q. $A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$.

Comme $\det$ est une fonction continue (pol. en les coeff. de la matrice), on a:

$$\begin{array}{ccc} \chi_{A_n B}(x) & = & \chi_{B A_n}(x) \\ \downarrow \scriptstyle n \rightarrow \infty & & \downarrow \scriptstyle n \rightarrow \infty \\ \chi_{AB}(x) & & \chi_{BA}(x) \end{array}$$

Et donc $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x) \quad \square$

Démo: (Lemme du noyau)

* Somme directe:

Procédons par récurrence sur m .

① $m=2$. S.g. P_1 et P_2 premier entre eux.

Alors par Bézout $\exists U_1, U_2 \in K[X]$ t.q. $U_1 P_1 + U_2 P_2 = 1$

$$\Rightarrow U_1 P_1(f) + U_2 P_2(f) = \text{id}$$

* Soit $x \in \text{Ker } P_1(f) \cap \text{Ker } P_2(f)$, on a:

$$x = U_1 P_1(f)(x) + U_2 P_2(f)(x) = 0 + 0 = 0$$

* Soit $x \in \text{Ker } P_1 P_2(f)$, on a:

$$x = \underbrace{U_1 P_1(f)(x)}_{:= y \in \text{Ker } P_2(f)} + \underbrace{U_2 P_2(f)(x)}_{:= z \in \text{Ker } P_1(f)}$$

Donc, on a bien

$$\text{Ker } P_1 P_2(f) = \bigoplus_{i=1}^2 \text{Ker } P_i(f)$$

② Même procédé

* Projecteurs:

Soit $j \in \{1, m\}$. Notons par Bézout U_j et $V_j \in K[X]$ t.q.

$$U_j P_j + V_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m P_k = 1.$$

$$\text{Posons } \pi_j = V_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m P_k.$$

On a:

* pour $x \in \text{Ker } P_j(f)$:

$$x = U_j P_j(f)(x) + V_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m P_k(f)(x) = \pi_j(x)$$

* pour $y = U_j P_j(f)(x)$:

$$\pi_j(y) = U_j V_j P_1 \dots P_m(f)(x) = 0_E.$$

Donc, π_j est le projecteur souhaité. $\square$

$$f \in \mathcal{L}(E) \quad \chi_f(x) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{m_i} \quad \text{avec } \lambda_i \in \mathbb{C} \text{ distincts et } m_i \geq 1.$$

Par le lemme et Cayley-Hamilton:

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \underbrace{\text{Ker } (f - \lambda_i \text{id})^{m_i}}_{:= F_i}$$

* Existence:

On pose:

$$d := \sum_{i=1}^r \lambda_i \pi_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i \text{id}_{F_i} \quad \text{et } n := f - d$$

On a:

- $f = n + d$
 - d diagonalisable
 - n nilpotent car $n|_{F_i}$ l'est
 - d pol. en f
 - n pol. en f
- $\Rightarrow d$ et n commutent

* Unicité:

Preons $(d, n), (\tilde{d}, \tilde{n}) \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $f = n + d = \tilde{n} + \tilde{d}$
 $\Rightarrow d - \tilde{d} = \tilde{n} - n$

- d et $\tilde{d}$ commutent et diag $\Rightarrow$ co-diag
- $\tilde{n} - n$ nilpotent

$$\text{Donc } d - \tilde{d} = \tilde{n} - n = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = \tilde{d} \\ n = \tilde{n} \end{cases} \quad \square$$